Una funzione $y = f(x)$ è **periodica** di periodo T (con T > 0) se si ha:

$$(*) \quad \boldsymbol{f(x + k\,T) = f(x)}$$

ovvero, se sostituendo ($x + k$ T) al posto di x, il valore della funzione non cambia.

Il più piccolo valore positivo di T viene detto *minimo periodo* o *periodo principale*.

Le funzioni goniometriche, come sappiamo, sono periodiche e precisamente *sen x* e *cos x* hanno minimo periodo T = 360° oppure T = 2π, mentre *tg x* e *ctg x* hanno minimo periodo T = 180° oppure T = π.

Vediamo adesso, direttamente con alcuni esempi come si determina il periodo delle funzioni goniometriche

Esercizi svolti

1. Determinare il periodo della funzione $\boldsymbol{y = \cos 2x}$

Sappiamo che la funzione coseno di un angolo è periodica quindi per la **(*)** si ha:

$\cos[2(x + k\,T)] = \cos 2x \;\rightarrow\; \cos(2x + 2\,k\,T) = \cos 2x$

essendo 360° il periodo del coseno di un angolo, si ha che il 2° membro dell'ultima eguaglianza si può scrivere come:

$\cos 2x = \cos(2x + k360°)$

quindi per transitività segue che:

$$\cos(2x + 2kT) = \cos(2x + k360°) \;\rightarrow\; \cancel{2x} + 2kT = \cancel{2x} + k360° \;\rightarrow\; T = \frac{\cancel{k}\,\cancel{360°}^{\,180°}}{\cancel{2}\,\cancel{k}} = 180°$$

2. Determinare il periodo della funzione $\boldsymbol{y = sen\,(3x + a)}$

Per la periodicità del seno di un angolo deve verificarsi la (*) e tenendo in considerazione il periodo di 2π del seno di un angolo si ha:

$sen\,[3(x + k\,T) + a] = sen\,(3x + a) = sen[(3x + a) + 2\,k\,\pi]$

quindi segue che:

$sen\,[3(x + k\,T) + a] = sen[(3x + a) + 2\,k\,\pi] \;\rightarrow\; 3(x + k\,T) + a = 3x + a + 2\,k\,\pi$

$$\cancel{3x} + 3kT + \cancel{a} = \cancel{3x} + 2k\pi + \cancel{a} \;\rightarrow\; T = \frac{2\cancel{k}\pi}{3\cancel{k}} = \frac{2}{3}\pi$$

Regola generale per la determinazione del periodo

Dai due esercizi precedentemente svolti possiamo dedurre la regola generale per la determinazione del periodo di funzioni goniometriche. Infatti se dobbiamo determinare il periodo della funzione di equazione generale:

$$y = a\,sen\,(\omega x + \beta)$$

procediamo al solito nel seguente modo:

$$a\,sen\,[\omega(x + k\,T) + \beta] = a\,sen\,[(\omega x + \beta) + 2\,k\,\pi]$$

da cui

$$\omega(x + k\,T) + \beta = \omega x + \beta + 2\,k\,\pi$$

$$\cancel{\omega x} + \omega kT + \cancel{\beta} = \cancel{\omega x} + \cancel{\beta} + 2k\pi \;\rightarrow\; \omega kT = 2k\pi \;\rightarrow\; T = \frac{2\cancel{k}\pi}{\omega\cancel{k}} \;\rightarrow\; T = \frac{2\pi}{\omega}$$

quindi il periodo generale del seno e coseno di un angolo è:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Analogamente si procede per la determinazione del periodo minimo della tangente o della cotangente di un angolo, basta solo sostituire il loro periodo π nella regola precedente al posto di 2 π , cioè:

$$\boxed{T = \frac{\pi}{\omega}}$$

con **ω** coefficiente numerico dell'angolo *x*.

Esercizi svolti

Determinare il periodo minimo delle seguenti funzioni goniometriche:

1) $y = sen5x$

Applicando la regola generale di T relativa al seno e coseno di un angolo, si ha

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{5}$$

2) $y = 2\cos 4x$

Si ha che:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad T = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{4}^{2}} \quad \rightarrow \quad T = \frac{\pi}{2}$$

3) $y = 3tg\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$

Applicando la regola generale di T relativa alla tangente o cotangente di un angolo, si ha:

$$T = \frac{\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad T = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{N.B.}$

4) $y = sen3x + \cos 2x$

Si tratta della somma di due funzioni periodiche di periodo rispettivamente:

$$sen3x \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos 2x \quad \rightarrow \quad T = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \pi$$

ovvero abbiamo la somma della funzione $sen3x$, che riprende gli stessi valori aggiungendo a x i multipli di $\frac{2\pi}{3}$, con un'altra funzione $\cos 2x$, che riprende gli stessi valori aggiungendo a x i multipli di π.

Dunque è evidente che , aggiungendo a x un multiplo comune di $\frac{2\pi}{3}$ e di π, entrambe le funzioni, e quindi la funzione data, riprenderanno gli stessi valori.

Pertanto, in generale:

il minimo periodo della somma di funzioni si ottiene calcolando il minimo comune multiplo tra i periodi delle singole funzioni

Per calcolare il loro m.c.m., riduciamo, per prima cosa, le due frazioni allo stesso denominatore che è 3, ottenendo:

$$\frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad \frac{3\pi}{3}$$

e poi, operando solo sui numeratori, calcoliamo il loro m.c.m., che tra 2 e 3 è 6, ottenendo:

$$\frac{6\pi}{3} \quad \text{e} \quad \frac{6\pi}{3}$$

quindi il periodo è

$$\mathrm{T} = \frac{\cancel{6}^2\pi}{\cancel{3}} = 2\pi$$

5) $y = 2sen4x + \cos 5x - 3tg(3x - \pi)$

Calcoliamo i periodi delle singole funzione addendi.

$$2sen4x \quad \rightarrow \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 5x \quad \rightarrow \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{5}$$

$$-3tg\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \mathrm{T} = \frac{\pi}{3}$$

Determiniamo il minimo periodo della funzione data calcolando dapprima il m.c.m. dei periodi per ridurli allo stesso denominatore, operando nel seguente modo:

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{15\pi}{30}, \quad \frac{12\pi}{30}, \quad \frac{10\pi}{30}$$

successivamente, operando solo sui numeratori, calcoliamo il loro m.c.m. che tra 15, 12 e 10 è 60, quindi si procede nel seguente modo:

$$\frac{15\pi}{30}, \quad \frac{12\pi}{30}, \quad \frac{10\pi}{30} \quad \rightarrow \quad \frac{60\pi}{30} \quad \rightarrow \quad T = \frac{\cancel{60}^2\pi}{\cancel{30}} = 2\pi$$