CALCOLO DEI LIMITI

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x - x^2}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x - x^2}{x+1} = +\infty$$

RACCOLTA DI ESERCIZI CON SOLUZIONE

Lorenzo Andreassi

PUOI TROVARE ALTRO MATERIALE DIDATTICO SU

www.lorenzoandreassi.it

Vi propongo questa raccolta di esercizi sul calcolo dei limiti. Sono esercizi da svolgere con soluzione finale.

BUON LAVORO!

22 IL CALCOLO DEI LIMITI

ESERCIZI

1. LE OPERAZIONI CON I LIMITI

Calcola i seguenti limiti, servendoti dei teoremi enunciati sui limiti e ricordando la continuità delle funzioni elementari.

1 A $\lim_{x\to 4} \frac{3x+\sqrt{x}}{x-2}$ [7]

1 B $\lim_{x\to 9} \frac{1-x}{\sqrt{x}-x-2}$ [1]

2 A $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(2\sqrt{2}\,\text{sen}\,x+\sqrt{2}\cos x+1\right)$ [4]

2 B $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \left(2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+2\cos x-1\right)$ [3]

3 A $\lim_{x\to 4} \frac{3^x+2^x-1}{2^{2x}-3^x+5}$ $\left[\frac{8}{15}\right]$

3 B $\lim_{x\to 2} \frac{3^x-2^{2x}-1}{2^x+3^x-5}$ [−1]

4 A $\lim_{x\to 3} \frac{\log(4-x)+\log(x+7)}{x+3}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

4 B $\lim_{x\to 2} \frac{\log(8+x)+\log(x-1)}{x+3}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

Utilizzando il teorema del confronto, calcola i seguenti limiti.

5 A $\lim_{x\to 0} \left(x^2-3x\right)\cdot \text{sen}\,\frac{1}{x}$ $[0]$

5 B $\lim_{x\to 0} \left(4x-x^2\right)\cdot \cos\frac{1}{x}$ $[0]$

Calcola il limite delle seguenti funzioni.

6 A $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-5}\right)$ $[0]$

6 B $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4}\right)$ $[0]$

7 A $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+x^2-6x+1\right)$ $[-\infty]$

7 B $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+6x^2-5x+3\right)$ $[-\infty]$

8 A $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+3x}{x^2-4x-2}$ $[-\infty]$

8 B $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-2x^3+3x^2}{x^3-4x-2}$ $[-\infty]$

9 A $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3x^2+x^4}{1-5x^4-2x}$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

9 B $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^3+4x^2}{2x^3-x+2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

10 A $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-x^2+5}{1-2x^3+2x^2}$ $[0]$

10 B $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x^3+7}{2-x+3x^4}$ $[0]$

11 A $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ $[-1]$

11 B $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+7}}{x+5}$ $[-1]$

12 A $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2+x-1}{x^2+4x+3}$ $[-1]$

12 B $\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+x+1}{x^2+x-2}$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

13 A $\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$ $[-\infty]$

13 B $\lim_{x\to-3^+}\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$ $[-\infty]$

14 A $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2\right)^{\frac{3x^2+1}{2x^2\cdot\ln\left(x^2+2\right)}}$ $\left[\sqrt{e^3}\right]$

14 B $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)^{\frac{2x^2+5}{3x^2\cdot\ln\left(x^2-1\right)}}$ $\left[\sqrt[3]{e^2}\right]$

Calcola il limite delle seguenti funzioni.

15 A $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x+2x}{\text{sen }x-2x}$ $[-3]$

15 B $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x-2x}{x-2\,\text{sen }x}$ $[1]$

16 A $\lim_{x\to 0}\frac{5-5\cos x}{2x\,\text{sen }x}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

16 B $\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos x}{x\,\text{sen }x}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

17 A $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }4x+x}{x}$ $[5]$

17 B $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x+5x}{x}$ $[8]$

18 A $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x}$ $\left[e^4\right]$

18 B $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{x}$ $\left[e^5\right]$

19 A $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{x}$ $[2]$

19 B $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x+1)}{x}$ $[4]$

20 A $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}$ $[e]$

20 B $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}$ $[e]$

Confronta fra loro gli infinitesimi seguenti.

21 A $f(x) = e^{x^2} - 1, \quad g(x) = 2x, \quad$ per $x \to 0$. $\quad [f(x)$ ord. sup. a $g(x)]$

21 B $f(x) = \ln(3x+1), \quad g(x) = x^2, \quad$ per $x \to 0$. $\quad [f(x)$ ord. inf. a $g(x)]$

Determina l'ordine dei seguenti infinitesimi.

22 A $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x}, \quad$ per $x \to \infty$. $\quad [2]$

22 B $f(x) = \dfrac{1}{3x^4 - x}, \quad$ per $x \to \infty$. $\quad [4]$

Confronta fra loro i seguenti infiniti.

23 A $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x} + 2, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad$ per $x \to +\infty$. $\quad$ [stesso ordine]

23 B $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5} + x, \quad g(x) = 3x + 2, \quad$ per $x \to +\infty$. $\quad$ [stesso ordine]

Determina l'ordine dei seguenti infiniti.

24 A $f(x) = \dfrac{1}{x^3 \cdot \sqrt{1 - \cos x}}, \quad$ per $x \to 0$. $\quad [4]$

24 B $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \operatorname{sen}^2 x}, \quad$ per $x \to 0$. $\quad [3]$

Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi (o infiniti) calcola i seguenti limiti.

25 A $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{3x \operatorname{sen} x}$ $\quad \left[\dfrac{1}{3}\right]$

25 B $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(e^{3x} - 1)}{1 - \cos x}$ $\quad [6]$

26 A $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^6 - 3x^3} + 2x}{2x^3 - 4}$ $\quad \left[\dfrac{1}{2}\right]$

26 B $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 3x + 5}{\sqrt{2x^4 - x + 1}}$ $\quad \left[2\sqrt{2}\right]$

Verifica che la seguente funzione è continua nel punto segnato a fianco utilizzando la definizione di funzione continua.

27 A $f(x) = x^2 + 7x$, $x_0 = 0$.

27 B $f(x) = x^2 + 5x$, $x_0 = 0$.

Nota la continuità di alcune funzioni elementari, stabilisci se la seguente funzione è continua e rappresentala.

28 A $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\quad [f(x) \text{ discontinua in } x = 0]$

28 B $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$ $\quad [f(x) \text{ discontinua in } x = 1]$

Date le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$, stabilisci se la funzione composta $(g \circ f)(x)$, considerata nel suo dominio naturale, è continua nel punto indicato a fianco.

29 A $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = \sqrt{2}$. [no]

29 B $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \ln x$, $x_0 = 1$. [no]

30 A $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \ln x$, $x_0 = 0$. [sì]

30 B $f(x) = \cos x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$. [sì]

Disegna il grafico della seguente funzione nell'intervallo $[-1;1]$, controlla le ipotesi del teorema di Weierstrass e, se esistono, determina il massimo M e il minimo m della funzione.

31 A $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \ln(1+x) & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$ $\quad [\text{no; } M = 1]$

31 B $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$ $\quad \left[\text{sì, } M = 1, \ m = \dfrac{1}{e}\right]$

Assegnata la seguente funzione, stabilisci se sono verificate le condizioni del teorema degli zeri negli intervalli a fianco indicati. Cosa possiamo dire per l'equazione $f(x)=0$?

32 A $f(x)=x^2-8x-2$; $I_1=[0;1]$; $I_2=[-1;2]$.

$[\text{no; sì; l'equazione ammette almeno una soluzione reale } x_1 \text{ tale che } -1<x_1<2]$

32 B $f(x)=2x^3-x+5$; $I_1=[-2;-1]$; $I_2=[0;1]$.

$[\text{sì; no; l'equazione ammette almeno una soluzione reale } x_1 \text{ tale che } -2<x_1<-1]$

6. I PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

Determina i punti di discontinuità delle seguenti funzioni. Nel caso di un punto di discontinuità di I specie, calcola il salto della funzione in quel punto.

33 A $f(x)=\dfrac{|2x+4|}{x+2}+1$ $[x=-2 \text{ discontinuità di I specie; salto}=4]$

33 B $f(x)=\dfrac{|3x+9|}{x+3}+2$ $[x=-3 \text{ discontinuità di I specie; salto}=6]$

34 A $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$ $[x=3 \text{ discontinuità di II specie; } x=-2 \text{ discontinuità eliminabile}]$

34 B $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}$ $[x=4 \text{ discontinuità di II specie; } x=-2 \text{ discontinuità eliminabile}]$

35 A $f(x)=e^{\frac{x-1}{x^2-1}}$ $[x=-1 \text{ discontinuità di II specie; } x=1 \text{ discontinuità eliminabile}]$

35 B $f(x)=e^{\frac{2+x}{4-x^2}}$ $[x=2 \text{ discontinuità di II specie; } x=-2 \text{ discontinuità eliminabile}]$

Determina i valori dei parametri *a* e *b* affinché la seguente funzione sia continua in tutto **R**.

36 A $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x+4 & \text{se } x\le 0 \\ 2^x+bx+a-b & \text{se } 0<x\le 1 \\ x^2+bx+a & \text{se } x>1 \end{cases}$ $[a=4, b=1]$

36 B $f(x)=\begin{cases} \cos x+a & \text{se } x\le 0 \\ 3^x+x+3a-3b & \text{se } 0<x\le 1 \\ x^2+bx+a+1 & \text{se } x>1 \end{cases}$ $[a=3, b=2]$

7. LA RICERCA DEGLI ASINTOTI

Determina gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni.

37 A $y=\dfrac{\ln x+1}{x}$ $\quad [x=0,\ y=0]$

37 B $y=\dfrac{\ln x-2}{x}$ $\quad [x=0,\ y=0]$

38 A $y=\dfrac{3x^2-x+1}{x+1}$ $\quad [x=-1,\ y=3x-4]$

38 B $y=\dfrac{2x^2-2x+3}{x+2}$ $\quad [x=-2,\ y=2x-6]$

39 A $y=(x+2)\cdot e^{x-1}$ $\quad [y=0]$

39 B $y=(x-2)\cdot e^{-x-1}$ $\quad [y=0]$

40 A $y=\sqrt{9x^2+4x-1}$ $\quad \left[y=\pm 3x\pm\dfrac{2}{3}\right]$

40 B $y=\sqrt{4x^2+5x-2}$ $\quad \left[y=\pm 2x\pm\dfrac{5}{4}\right]$

8. IL GRAFICO PROBABILE DI UNA FUNZIONE

Traccia il grafico probabile della seguente funzione.

41 A $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{2x^2+x-15}$

41 B $y=\dfrac{\sqrt{x^3-1}}{x-4}$